ALGEBRA M1 – Lista 6

Macierze i układy równań

Zad.1. Niech $\varphi : V \to W$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Pokazać, że zachowuje on następujące własności algebraiczne:

1. jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni V, to $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ są liniowo niezależne w przestrzeni W
2. jeśli jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tworza bazą przestrzeni V, to $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ są bazą przestrzeni W
3. jeśli $\dim V = n$, to $\dim W = n$

Zad.2. Czy przestrzeń liniowa $\mathbb{R}[x]$ jest izomorficzna

1. ze swoją podprzestrzenią W rozpiętą przez jednomiany $x^2, x^4, x^6, \ldots$?
2. ze swoją podprzestrzenią $W = \{w \in \mathbb{R}[x] : w(1) = 0\}$?

Zad.3. Pokazać, że zbiór macierzy $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ z działaniami dodawania i mnożenia przez skalary z ciała $\mathbb{K}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Znaleźć wymiar tej przestrzeni i podać najprostszy przykład bazy.

Zad.4. Wyznaczyć wszystkie macierze rzeczywiste stopnia 2 (wymiaru 2 na 2) A, takie że

$$(a)\ \ A^2 = 0, \quad (b)\ \ A^2 = I$$

Zad.5. Wyznaczyć wszystkie macierze rzeczywiste A, takie że

$$A\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} A$$

gdzie α, β są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Zad.6. Wykazać, że operacja transpozycji spełnia warunki

$$(a)\ \ (A^T)^T = A, \quad (b)\ \ (AB)^T = B^T A^T$$

Zad.7. Jeżeli $A \in M_n(\mathbb{K})$, to *śladem* tej macierzy nazywamy sumę elementów leżących na głównej przekątnej, tzn.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Pokazać, że zachodzi własność $\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(CB)$ dla B, C tak dobranych, że BC oraz CB są macierzami kwadratowymi.

Zad.8. Wyznaczyć rzędy macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Zad.9. Wyznaczyć rzędy macierzy A w zależności od parametrów rzeczywistych p, q:

$$\begin{pmatrix} p+2 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & p+1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & p+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p & q & 1 & 1 \\ 1 & pq & 1 & q \\ 1 & q & p & 1 \end{pmatrix}$$

Zad.10. Stosując twierdzenie Kroneckera-Capelliego, określić liczbę rozwiązań układu i liczbę parametrów, nie rozwiązując ich

$$\begin{cases} 2x+3y+4z &= 1 \\ 3x+4y+2z &= 2 \\ 4x+2y+3z &= 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z &= -1 \\ x+2y+3z &= 1 \\ 2x+3y+4z &= 2 \\ 3x+2y+z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-y+z+2t &= 3 \\ 2x+3y-z+t &= 0 \\ 2x-4y+2z+t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z-3t &= 2 \\ 2x+y-z+4t &= 1 \\ 4x-y+3z-2t &= 5 \end{cases}$$

Zad.11. Przedyskutować rozwiązalność układu w zależności od parametru λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3 &= \lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3 &= \lambda^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x_1-3x_2+5x_3+7x_4 &= 1 \\ 4x_1-6x_2+\lambda x_3+3x_4 &= \lambda \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4 &= \lambda-1 \end{cases}$$

Zad.12. Rozwiązać układy jednorodne i znaleźć układy fundamentalne rozwiązań:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1-x_2-x_3 &= 0 \\ x_1+3x_2+3x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4 &= 0 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4 &= 0 \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4 &= 0 \\ x_1+4x_2+x_3+x_4 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_3-x_4 &= 0 \\ 2x_1+x_3-2x_4 &= 0 \\ x_1+2x_3-x_4 &= 0 \\ x_1+x_3+x_4 &= 0 \end{cases}$$

Zad.13. Rozwiązać układy niejednorodne dwiema metodami: (a) odgadnąć jedno rozwiązanie i skorzystać z wyników zadania 12, (b) metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_1-x_2+x_3-x_4 &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-x_2-x_3 &= 1 \\ x_1+3x_2+3x_3 &= 1 \end{cases}$$

Zad.14. Rozwiązać układy równań z zadania 10 metodą eliminacji Gaussa.

Romuald Lenczewski